Zadania przygotowawcze do matury. Podsumowanie matury próbnej z marca 2010r.

Poniższa lista zostanie podsumowana sprawdzianem złożonym z nieznacznie zmienionych zadań

1. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.
   a) Wyznacz pole trójkąta ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych,
   b) Jaka jest najmniejsza liczba naturalna nieparzysta x, dla której funkcja przyjmuje wartość ujemną?
   c) Punkt $P = (\frac{m}{2}, 1)$ należy do wykresu tej funkcji. Wyznacz wartość parametru m.

   Wskazówki: a) Rozwiązanie odczytaj z wykresu albo wyznacz punkt przecięcia prostej z osią y (to po prostu wyraz wolny b z postaci kierunkowej), miejsce zerowe tej funkcji (rozwiązując równanie: $f(x) = 0$) i wykorzystaj to, że ten trójkąt jest prostokątny, b) Rozwiązanie odczytaj z wykresu, albo rozwiąż nierówność $-\frac{2}{3}x + 2 < 0$ i wskaż w zbiorze rozwiązań najmniejszą liczbę nieparzystą. c) Punkt należy do wykresu funkcji, jeśli jego współrzędne spełniają wzór tej funkcji, wystarczy podstawić te współrzędne do wzoru funkcji i rozwiązać równanie z niewiadomą m.

2. Oblicz kolejne wartości: $(-27)^{\frac{2}{3}}, -27^{-\frac{2}{3}}, -27^{\frac{2}{3}}, (-27)^{-\frac{2}{3}}$.

   Wskazówka: Patrz "Wybrane wzory matematyczne CKE" str. 1.

3. Podaj równania wszystkich czterech prostych równoległych do osi układu współrzędnych i stycznych do okręgu o równaniu $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2$.

   Wskazówka: Odczytaj z równania współrzędne środka i promień okręgu ("Wwm CKE" str. 6). Następnie wykonaj rysunek i odczytaj z niego równania stycznych.

4. Oblicz obwód i pole kwadratu, jeśli pole koła opisanego na tym kwadracie wynosi 4π.

   Wskazówka: Średnica tego okręgu to przekątna kwadratu.

5. Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu, jeśli objętość kuli opisanej na tym sześcianie wynosi $4\pi\sqrt{3}$.

   Wskazówka: Wyznacz najpierw promień tej kuli i wykorzystaj związek między średnicą kuli, a przekątną sześcianu.

6. Oblicz obwód i pole trójkąta równobocznego, jeśli długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest...
   a) ...równa $\sqrt{12}$, b) ...większa o 1 od długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

   Wskazówka: Wiadomo, że środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym i środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, to ten sam punkt, który (będąc jednocześnie środkiem ciężkości) dzieli każdą środkową (więc i wysokość) w stosunku 1:2. Korzystając z podanych informacji wyznacz wysokość tego trójkąta, a następnie korzystając ze znanego wzoru na wysokość trójkąta równobocznego wyznacz długość boku tego trójkąta.

7. Wyznacz x tak, aby liczby $2, x, 8$ utworzyły w podanej kolejności:
   a) monotoniczny ciąg geometryczny, b) niemonotoniczny ciąg geometryczny, c) ciąg arytmetyczny.

   Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na średnią geometryczną: $b^2 = ac$ i arytmetyczną: $2b = a + c$.

8. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ losujemy a) ze zwracaniem, b) bez zwracania, dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą.

   Wskazówki: Oba podpunkty można rozwiązać korzystając z dobrze narysowanych drzewek, albo po prostu wypisując wszystkie zdarzenia "na piechotę". Ale można też tradycyjnie:
   a) Zdarzeniem elementarnym jest dwuwyrazowa wariacja z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego, czyli para liczb: (_, _); moc Ω można zatem wyznaczyć ze wzoru na wariację, albo korzystając z reguły mnożenia.
   b) Można skorzystać z opisu z podpunktu a), ale można też zaniedbać kolejność: zdarzeniem elementarnym jest dwuelementowy podzbiór ze zbioru 6-elementowego, czyli dwuelementowa kombinacja ze zbioru 6-elementowego. Suma dwóch liczb jest nieparzysta, jeśli jedna z tych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta. Łatwo wskazać wszystkie takie dwójki w obu podpunktach.

9. Cenę pewnego towaru obniżono dwukrotnie o 20%, a następnie podniesiono dwukrotnie o 50%. W jaki sposób zmieniła się ostatnia cena w stosunku do początkowej?

Wskazówka: Każda z czterech zmian ceny polega na **pomnożeniu** poprzedniej ceny przez pewien czynnik liczbowy. Wystarczy pomnożyć przez siebie te cztery czynniki i zinterpretować wynik. Patrz przykład 11. z listy "Świat liczb rzeczywistych - zadania elementarne" oraz zadanie 13. z listy "Świat liczb rzeczywistych - zadania przygotowawcze do sprawdzianu". Obie listy są dostępne na stronie szkoły.

10. Przekształć do postaci pojedynczej potęgi:

a) $\dfrac{(-a)^4:(-a)^{-5}}{\left((-a)^{-2}\right)^4\cdot a^3}=$, b) $\dfrac{\left((b^{-1})^{-3}\cdot(-b)^{-4}\right)^{-2}}{(-b)^{-13}:(-b)^{-7}}=$

Wskazówka: Zadania pochodzą z listy "Świat liczb rzeczywistych - zadania elementarne". Tam też jest przykładowe rozwiązanie. W każdym przypadku świadomie korzystaj ze wzorów dostępnych na pierwszej stronie "Wwm CKE"

11. Oblicz korzystając z odpowiednich wzorów dotyczących potęg:

a) $\dfrac{45^4}{75^3\cdot 27}=$, b) $\dfrac{(-0{,}2)^5\cdot\left(-5^2\right)^{-3}}{125^{-2}:(-5)^5}=$

Wskazówka: jak w zadaniu poprzednim.

12. Podaj ostateczny rozkład na czynniki i wskaż wszystkie pierwiastki wielomianu
a) $W(x)=(x^2-3)(x^2+4)(x^2-4x+4)(x^2+x-6)(2x+1)$,
b) $W(x)=x^3+2x^2-5x-10$.
Ile różnych pierwiastków wymiernych, niewymiernych, całkowitych, a ile naturalnych ma ten wielomian?

Wskazówki: a) Trzy spośród widocznych czterech czynników kwadratowych można rozłożyć na czynniki liniowe stosując dwukrotnie wzory skróconego mnożenia i jedną metodę tradycyjną (przez "deltę"). Z ostatniego czynnika liniowego wyłącz 2. b) To typowe zadanie na grupowanie wyrazów.

13. Narysuj wykres funkcji a) $f(x)=2x-3$, b) $f(x)=x^2$, c) $f(x)=\frac{-2}{x}$, d) $f(x)=|x|$, a następnie dorysuj do każdego wykresu odpowiednio przesunięty wykres nowej funkcji: $y=f(x+2)-1$. Podaj jawny wzór każdej nowej funkcji. Jakie miejsca zerowe ma nowa funkcja?

Wskazówka: odczytaj z podanego wzoru o ile jednostek w poziomie, a o ile w pionie, należy przesunąć każdy wykres.

14. Rozwiąż nierówność a) $(x+3)(5-x)\geq 0$, b) $(x+4)^2\leq 0$, c) $x^2+4x-12>0$. Dodatkowo do każdego podpunktu podaj największą liczbę całkowitą ujemną d, która tej nierówności nie spełnia.

Wskazówka: Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej opisanej wyrażeniem z lewej strony nierówności. Liczby całkowite ujemne, to te "na lewo" od zera ;-)

15. Do wykresu funkcji f należy punkt $P(1,3)$. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji jeśli:
a) $f(x)=2x+b$, b) $f(x)=x^2+2x+c$, c) $f(x)=\frac{a}{x}+1$.

Wskazówka: W każdym przypadku wykorzystaj najpierw współrzędne punktu *P* do wyznaczenia wartości niewiadomego parametru (oznaczonego literą *b*, *c* i *a*), a następnie wyznacz miejsce zerowe funkcji rozwiązując odpowiednie równanie.

16. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby -1 i 3, a wykres tej funkcji przechodzi przez punkt *P*=(-2, -5). Wyznacz wzór tej funkcji i przedstaw go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.

Wskazówka: Rozpocznij od postaci iloczynowej, ponieważ znane są pierwiastki. Współczynnik *a* można wyznaczyć korzystając ze współrzędnych punktu *P*.

Odpowiedzi do zadań:

1. a) 3, b) 5, c) 3.

2. $9, -\frac{1}{9}, -9, \frac{1}{9}$.

3. $y = -3 - \sqrt{2}$, $y = -3 + \sqrt{2}$, $x = 1 = \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$.

4. $L = 8\sqrt{2}$, $P = 8$.

5. $P_c = 24$, $V = 8$.

6. $L = 18, P = 9\sqrt{3}$.

7. a) 4, b)-4, c) 5.

8. a) $\frac{5}{18}$, b) $\frac{1}{3}$.

9. Początkowa cena została podniesiona o 44%.

10. a) $-a^{14}$, b) b^8.

11. a) $\frac{9}{25} = 0{,}36$, b) -1.

12. a) $W(x) = 2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 2)^3(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 4)$, liczba pierwiastków: $w - 3, nw - 2, c - 2, n - 1$.

b) $W(x) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x + 2)$, liczba pierwiastków: $w - 1, nw - 2, c - 1, n - 0$.

13. Każdy wykres należy przesunąć o wektor [-2, -1], czyli o dwie jednostki w lewo i jedną jednostkę w dół.

a) $y = 2(x + 2) - 3 - 1 = 2x, x = 0$,

b) $y = (x + 2)^2 - 1$, $x = -1$ lub $x = -3$,

c) $y = \frac{-2}{x+2} - 1$, $x = -4$,

d) $y = |x + 2| - 1$, $x = -1$ lub $x = -3$.

14. a) $x \in \langle -3, 5 \rangle$, $d = -4$,

b) $x = -4$, $d = -5$,

c) $x \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$, $d = -1$.

15. a) $y = 2x + 1$, $x = -\frac{1}{2}$,

b) $y = x^2 + 2x$, $x = 0$ lub $x = -2$,

c) $y = \frac{2}{x} + 1$, $x = -2$.

16. Postać ogólna: $y = -x^2 + 2x + 3$,

postać iloczynowa: $y = -(x + 1)(x - 3)$,

postać kanoniczna: $y = -(x - 1)^2 + 4$.