Wielomiany

Zad 1 Wyznacz wielomian $Q(x)$, który jest różnicą wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeśli: $W(x) = -x^4 - 2x^3$, $P(x) = x^3 - 4x$. Podaj stopień wielomianu.
Rozwiązanie: Należy wykonać następujące działanie:
$Q(x) = W(x) - P(x)$ wstawiamy wartości wielomianów do wzoru pamiętaj o wstawieniu w nawias wielomianu $P(x)$,
$Q(x) = -x^4 - 2x^3 - (x^3 - 4x) =$ opuszczamy nawias zmieniając znaki na przeciwne
$= -x^4 - 2x^3 - x^3 + 4x =$ teraz redukujemy wyrazy podobne tz. niewiadome muszą być w tej samej potędze, w tym przypadku wyrazami podobnymi są $-2x^3$ i $-x^3$ ich suma daje $-3x^3$
$-x^4 - 3x^3 + 4x$ Stopień wielomianu jest to największa potęga jaka występuje w wielomianie
$stw = 4$
Postępując analogicznie wykonaj przykłady:

a) $W(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3,$ $P(x) = -2x^5 + 5x^3 - 2x + 5$
b) $W(x) = 4x^4 - 5x + 1,$ $P(x) = 4x^4 + 1$
c) $W(x) = -8x^7 + 6x^5,$ $P(x) = -8x^7 + 6x^5$
d) $W(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{1}{4},$ $P(x) = 8x^2 - 6$
e) $W(x) = \frac{3}{4}x^7 - \frac{3}{8}x^6 + \frac{1}{8}x^5 + 8,$ $P(x) = 0{,}752x^7 + \frac{5}{8}x^6 + 0{,}125x^5 + 2$
f) $W(x) = 4x^3 - 12x^2 + 0{,}6x + 0{,}4,$ $P(x) = -4x^3 - 12x + 0{,}5x + 0{,}4$
g) $W(x) = -2x^3 + \sqrt{3}x^2 + 5x - \sqrt{2},$ $P(x) = \sqrt{2}x^3 - x^2 + 4x + 1$
h) $W(x) = \sqrt{2}x^4 - 3\sqrt{3}x^3 + 4x^2 + 1,$ $P(x) = x^4 - x^3 + \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}$

Zad 2 Wykonaj działanie: $[P(x)]^2 \cdot W(x)$, gdzie $W(x) = -x^4 - 2x$ i $P(x) = x^2 - 6$
Rozwiązanie: Najpierw wstawiamy wielomiany do wzoru:
$[P(x)]^2 \cdot W(x) = (x^2 - 6)^2 \cdot (-x^4 - 2x) =$ teraz stosujemy wzór $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ do pierwszego wyrażenia $(x^2 - 6)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 6 + 6^2 = x^4 - 12x^2 + 36$
$= (x^4 - 12x^2 + 36) \cdot (-x^4 - 2x) =$ teraz mnożymy każdy wyraz z pierwszego nawiasu przez każdy wyraz drugiego nawiasu pamiętając że przy mnożeniu niewiadomych potęgi się dodaje
$= -x^8 - 2x^3 + 12x^6 + 24x^3 - 36x^4 - 72x$ teraz redukujemy wyrazy podobne
$= -x^8 + 12x^6 - 36x^4 + 22x^3 - 72x$
Wykonaj następujące przykłady wstawiając do wzoru $[P(x)]^2 \cdot W(x)$:

a) $W(x) = x^3 + x + 1,$ $P(x) = -2x^2 + 3$
b) $W(x) = -x^4 - x^3 + 1,$ $P(x) = -2x^3 - 4$
c) $W(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1,$ $P(x) = 5x^3 - 6x$
d) $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ $P(x) = 2x^2 + 3x$

Zad 3 Sprawdź czy wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe gdzie $W(x) = -5x^3 + (x - 4)^2 - 8$ oraz $F(x) = 2x(x - 4) - x^2(5x + 1) + 8$
Rozwiązanie: Dwa wielomiany są równe gdy współczynniki przy niewiadomych w wielomianie $W(x)$ są takie same jak w wielomianie $F(x)$. Najpierw musimy uporządkować oba wielomiany, w $W(x)$ musimy zastosować wzór skróconego mnożenia ten sam co w poprzednim zadaniu
$W(x) = -5x^3 + (x - 4)^2 - 8 = -5x^3 + x^2 - 8x + 16 - 8 = -5x^3 + x^2 - 8x + 8$
$F(x) = 2x(x - 4) - x^2(5x + 1) + 8 = 2x^2 - 8x - 5x^3 - x^2 + 8 = -5x^3 + x^2 - 8x + 8$
$a_{3W} = -5 = a_{3F}$, $a_{2W}1 = a_{2F}$, $a_{1W} = -8 = a_{1F}$, $a_{0W} = 8 = a_{0F}$ jak widać współczynniki są takie same.
Wniosek: wielomiany są równe.

Wykonaj następujące przykłady:

a) $W(x) = (2x-1)^2(x+3)$ $\quad F(x) = 4x^3 + 12x^2 + x + 3$
b) $W(x) = (4x-3)(x^2+1)(4x+3)$ $\quad F(x) = 16x^4 + 7x^2 - 9$
c) $W(x) = (3x-1)(4-2x)(x+1)$ $\quad F(x) = -6x^3 + 8x^2 + 10x - 4$
d) $W(x) = (3-5x)^2(x^2-1) - 25x^4$ $\quad F(x) = -30x^3 + 16x^2 + 30x - 9$
e) $W(x) = 3x^5 - (2x^2+1)(x^3-1)$ $\quad F(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1$

Zad 4 Sprawdź czy istnieje liczba a, dla której wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są równe, jeśli $W(x) = (x-a)(x+3)^2$ oraz $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 8$

Rozwiązanie: Najpierw porządkujemy wielomian $W(x)$ podnosimy drugi nawias stosując wzór skróconego mnożenia, a potem mnożymy każdy wyraz pierwszego nawiasu przez wszystkie wyrazy drugiego nawiasu.

$W(x) = (x-a)(x+3)^2 = (x-a)(x^2+6x+9) = x^3 + 6x^2 + 9x - ax^2 - 6ax - 9a =$ Teraz grupujemy wyrazy podobne $= x^3 + 6x^2 - ax^2 + 9x - 6ax - 9a =$ wyciągamy wspólny czynnik przed nawias w wyrazach podobnych $= x^3 + x^2(6-a) + x(9-6a) - 9a$ Podobnie jak w poprzednim zadaniu porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach

$a_{3W} = 1 = a_{3P}$, $a_{2W=}6 - a$, $a_{2P} = 5$ aby wielomiany były równe to $a_{2W} = a_{2P}$, więc

$6 - a = 5$
$-a = 5 - 6$
$-a = -1 \ /:(-1)$
$a = 1$

$a_{1W} = 9 - 6a$, $a_{1P} = 3$ porównujemy $a_{1W} = a_{1P}$ czyli

$9 - 6a = 3$
$-6a = -9 + 3$
$-6a = -6 \ /:(-6)$
$a = 1$

$a_{0W} = -9a$, $a_{0P} = -8$ porównujemy liczby

$-9a = -8 \ /(-9)$

$a = \frac{8}{9}$ Liczba a nie może być jednocześnie równe 1 oraz $\frac{8}{9}$. Nie istnieje taka liczba a dla której wielomiany $W(x)$ oraz $P(x)$były równe.

Wykonaj następujące przykłady:

a) $W(x) = (x^2-1)(x^2-9)$ $\quad P(x) = x^4 + ax^2 + a + 1$
b) $W(x) = (x+a)(x+1)^2$ $\quad P(x) = x^3 - 3x - 2$
c) $W(x) = (x^2-ax)(x+2a) + 8$ $\quad P(x) = x^3 - 2x^2$
d) $W(x) = 2x^4 - 3(a+1)x^3 + 4a$ $\quad P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 8$
e) $W(x) = (x^3-2a)(x^3+2a) - 6x$ $\quad P(x) = x^9 + 3ax - 16$
f) $W(x) = (3x-a)^3 \cdot 4x$ $\quad P(x) = 36x^3 + 48x^2 + 16x$

Zad5. Rozłóż wielomian na czynniki wyłączając wspólny czynnik przed nawias $W(x) = x^4 - 7x^3$

Rozwiązanie: Wspólnym czynnikiem jest niewiadoma w najmniejszej potędze czyli $7x^3$

$W(x) = 14x^4 - 7x^3 = 7x^3(x-2)$

Wykonaj następujące przykłady:

a) $W(x) = x^3 + 2x^2$
b) $W(x) = 6x^3 - 12x^2 + 18x$
c) $W(x) = 3x^4 + 2x^2$
d) $W(x) = 4x^5 - 2x^4 + 6x^2$
e) $W(x) = 5x^3 + 20x^2$

Zad 6. Rozłóż wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia $W(x) = 3x^3 - 27x$
Rozwiązanie: Najpierw wyciągamy wspólny czynnik przed nawias
$W(x) = 3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) =$ a teraz stosujemy wzór skróconego mnożenia
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$= 3x(x-3)(x+3)$

Przykład1: $w(x) = x^4 - 4 =$
$(x^2 - 2)(x^2 + 2) =$
$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$
Przykład 2: $W(x) = x^3 - 4x^2 + x =$
$x(x^2 - 4x + 4) =$
$\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt{4} = 2$
(zwijamy we wzór skróconego mnożenia tj. pierwiastkujemy 1 i 3 wyraz i sprawdzamy środek czy jest to iloczyn 1 wyraz przez 2 i razy 2np.
$x(x-2)^2$

Wykonaj następujące przykłady:

a) $W(x) = 4x^3 - \frac{1}{9}x$
b) $W(x) = 16x^5 - 4x^3$
c) $W(x) = 2x^4 - 6x^2$
d) $W(x) = 3x^4 - 3x^2$
e) $W(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{9}x^2$
f) $W(x) = 9x^2 - 30x + 25$
g) $W(x) = -25x^2 - 20x - 4$
h) $W(x) = x^2 - 8x + 16$
i) $W(x) = 4x^2 + 4x + 1$
j) $W(x) = 9x^2 - 6x + 1$

Zad 7. Rozłóż wielomian na czynniki $W(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$
Rozwiązanie: Najpierw wyłączamy wspólny czynnik przed nawias czyli x^2
$W(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 + x - 2) =$ teraz do działania w nawiasie liczymy najpierw Δ, a potem x_1, x_2 $\Delta = b^2 - 4ac$, $a = 1, b = 1, c = -2$
$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$
+

$\sqrt{\Delta} = 3$ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2\cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$, teraz zapisujemy w postaci iloczynowej $W(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x+2)(x-1)$
Wykonaj następujące przykłady:

a) $W(x) = 2x^6 + 3x^5 - 2x^4$
b) $W(x) = 4x^5 - 6x^4 - 10x^3$
c) $W(x) = 6x^7 - 8x^6 - 8x^5$
d) $W(x) = 4x^5 - 4x^4 - 24x^3$
e) $W(x) = 2x^8 - 2x^7 + x^6$
f) $W(x) = 2x^6 + 2x^5 + 3x^4$
g) $W(x) = 4x^5 + 7x^4 - 2x^3$
h) $W(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - x^2$

Zad 8. Rozłóż wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia $W(x) = x^3 + 27$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$W(x) = x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$, teraz policzymy Δ dla wyrażenia w nawiasie
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27 < 0$ stąd wynika że czynnik $x^2 - 3x + 9$ jest nierozkładalny.
Wykonaj następujące przykłady:

a) $W(x) = x^3 + 1$
b) $W(x) = x^3 - 8$
c) $W(x) = 8x^3 + 1$
d) $W(x) = 125x^3 - 8$
e) $W(x) = 8x^6 - 27x^3$
f) $W(x) = x^7 + 64x^4$

W przykładzie e i f wyłącz najpierw wspólny czynnik przed nawias.

Zad 9. Rozłóż wielomian na czynniki metodą grupowania wyrazów $W(x) = \underline{x^3 - 2x^2} - \underline{9x + 18}$
z dwóch pierwszych czynników wyłączamy wspólny czynnik x^2, a z dwóch kolejnych -9 (wyrażenie w nawiasach musi być takie same)
$W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = x^2(x-2) - 9(x-2) =$ teraz wyłączamy nawias jako wspólny czynnik przed wszystko $= (x-2)(x^2 - 9) =$ drugi nawias rozbijamy na dwa nawiasy zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia $= (x-2)(x-3)(x+3)$

Wykonaj następujące przykłady:

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$
b) $W(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 10$
c) $W(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 3$
d) $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$
e) $W(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$
f) $W(x) = x^4 - x^3 - 8x + 8x$
g) $W(x) = 5x^3 + 15x^2 - x - 3$
h) $W(x) = x^5 + 2x^4 - 27x^2 - 54x$

Zad 10. Rozwiąż równanie $a)\ 4x^3 - 12x^2 = 0,\ b)\ x^5 - 4x = 0$

Rozwiązanie: rozwiązujemy podobnie jak we wcześniejszych zadaniach lecz nie zapisujemy w postaci iloczynowej tylko wyznaczamy x

$a) 4x^2(x-3) = 0$ teraz przyrównujemy do 0

$4x^2 = 0$ lub $x - 3 = 0$

$x = 0$ lub $x = 3$

$b)\ x(x^4 - 4) = 0$

$x = 0$ lub $x^4 - 4 = 0$ teraz rozkładamy na dwa nawiasy $(x^2-2)(x^2+2) = 0$ do pierwszego nawiasu znowu stosujemy ten sam wzór $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2) = 0$

teraz każde wyrażenie przyrównujemy do zera $x - \sqrt{2} = 0$ lub $x + \sqrt{2} = 0$, to $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ i $x = 0$ czynnik $x^2 + 2 = 0$ nie możemy obliczyć, bo gdy przeniesiemy 2 na drugą stronę to uzyskamy $x^2 = -2$ nie możemy pierwiastkować liczby ujemnej.

Wykonaj następujące przykłady:

a) $3x^4 + 6x^2 = 0$
b) $5x^4 + x^2 = 0$
c) $x^4 - 9x^2 = 0$
d) $x^3 - 5x = 0$
e) $8x^3 + 6x^2 = 0$
f) $4x^5 - 16x^3 = 0$
g) $-x^5 + 8x^2 = 0$
h) $2\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}x^2 = 0$
i) $3x^4 = -27x^3$
j) $x^5 = 16x$

Zad 11. Rozwiąż równanie, a) $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$, b) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

Rozwiązanie: a) postępując jak w zadaniu 9 wyłączamy wspólny czynnik z 2 pierwszych czynników i z dwóch następnych

$x^2(x+4) - 2(x+4) = 0$

$(x+4)(x^2-2) = 0$

$(x+4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

$x + 4 = 0 \lor x - \sqrt{2} = 0 \lor x + \sqrt{2} = 0$

$x = -4 \lor x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2}$

b) wyłączamy wspólny czynnik przed nawias a potem przyrównuje do 0

$x(x^2 - 7x + 12) = 0$

$x = 0 \lor x^2 - 7x + 12 = 0$ liczymy $\Delta = b^2 - 4ac$ i $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$

$x_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $\quad x_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Wykonaj następujące przykłady:

a) $x^5 + 4x^3 - x^2 - 4 = 0$
b) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$
c) $3x^3 + 5x^2 - 12x - 20 = 0$
d) $10x^3 + 42x^2 - 5x - 21 = 0$
e) $5x^5 + 4x^4 - 5x - 4 = 0$
f) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$
g) $2x^6 - 8x^4 - 2x^2 + 8 = 0$
h) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$
i) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$
j) $x^3 + 4x = -5x^2$
k) $-\frac{1}{4}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$
l) $18x^5 = x^7 + 3x^6$
ł) $-x^3 + 2x^2 = x$