FUNKCJA KWADRATOWA

Zad 1 Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej

Przykład 1 $y = 3(x-3)^2 + 5$ (postać kanoniczna)

Postać ogólna funkcji kwadratowej to: $y = ax^2 + bx + c; (a \neq 0)$. Aby ją uzyskać pozbywamy się nawiasu, czyli w pierwszej kolejności korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy, a następnie wymnażamy nawias przez liczbę.

$$y = 3(x-3)^2 + 5 = 3(x^2 - 6x + 9) + 5 = 3x^2 - 18x + 27 + 5 = 3x^2 - 18x + 32.$$

Zatem postać ogólna danej funkcji to $y = 3x^2 - 18x + 32$.

Przykład 2 $y = 2(x-2)(x+1)$ (postać iloczynowa)

W tym przypadku wymnażamy oba nawiasy przez siebie, redukujemy wyrazy podobne i przemnażamy przez współczynnik, w tym przypadku równy 2.

$$y = 2(x-2)(x+1) = 2(x^2 + x - 2x - 2) = 2(x^2 - x - 2) = 2x^2 - 2x - 4.$$

Zatem postać ogólna danej funkcji to $y = 2x^2 - 2x - 4$.

Ćwiczenia:

Przedstaw podane funkcje w postaci ogólnej:

a) $y = 2(x+3)^2 - 4$

b) $y = 4(x - \frac{1}{2})^2$

c) $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$

d) $y = -2(x-1)^2 + 8$

e) $y = 5(x+4)^2 + \sqrt{5}$

f) $y = (x-9)^2 + \frac{2}{3}$

g) $y = (x-3)(x-6)$

h) $y = 3(x + \frac{1}{3})(x-1)$

i) $y = 8(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{4})$

j) $y = -2(x - \sqrt{3})(x+1)$

k) $y = -(x+3)(x - \frac{2}{7})$

l) $y = (x + \frac{3}{4})(x+4)$

Zad 2 Zapisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

Przykład 1 $y = x^2 + 6x + 1$

I SPOSÓB

Wyrażenie $x^2 + 6x + 1$ przekształcam tak, aby móc zapisać jego część w postaci kwadratu sumy lub różnicy przy pomocy wzoru skróconego mnożenia:

$$y = x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2 \cdot 3x + 1 = (x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2) - 3^2 + 1 = (x+3)^2 - 8$$

II SPOSÓB

Wyznaczam współrzędne wierzchołka paraboli korzystając ze wzorów: $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$,

$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -\frac{-32}{4} = -8$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 36 - 4 = 32$.

Następnie zapisuję postać kanoniczną ($y = a(x-p)^2 + q$) uwzględniając wyliczone *p* i *q*.

Zatem postać kanoniczna danej funkcji to $y = (x+3)^2 - 8$.

Przykład 2 $y = 2x^2 + 12x + 7$

I SPOSÓB

$y = 2x^2 + 12x + 7 = 2(x^2 + 6x) + 7 = 2[(x^2 + 2\cdot 3x + 3^2) - 3^2] + 7 = 2(x+3)^2 - 11$.

I I SPOSÓB

$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2\cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3$, $\quad q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-88}{4\cdot 2} = -\frac{-88}{8} = -11$;

Gdzie $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 4\cdot 2\cdot 7 = 144 - 56 = 88$.

Zatem postać kanoniczna danej funkcji to $y = 2(x+3)^2 - 11$

Ćwiczenia:

Zapisz wzór funkcji w postaci kanonicznej dowolnym sposobem:

a) $y = x^2 + 8x - 6$

b) $y = x^2 - 10x + 16$

c) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$

d) $y = x^2 - 5x - \frac{3}{4}$

e) $y = 3x^2 - 3x - \frac{1}{4}$

f) $y = -2x^2 + 4x + 5$

g) $y = 4x^2 - 12x + 5$

h) $y = 2x^2 + x + 1$

Zad 3 Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli

Przykład 1 $y = -3(x+1)^2 + 2$.

Funkcja ta zapisana jest w postaci kanonicznej, czyli $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie (p, q) to współrzędne wierzchołka paraboli. Zatem $-3(x+1)^2 + 2 = -3(x - \underset{\downarrow\, p}{(-1)})^2 + \underset{\downarrow\, q}{2}$

Współrzędne wierzchołka to (-1, 2).

Przykład 2 $y = 2(x - \underset{\downarrow\, p}{2})^2 + \underset{\downarrow\, q}{4}$ (tzn. w nawiasie jest „minus"), współrzędne wierzchołka to (2, 4).

Przykład 3 $y = -4x^2 + 2$ (tzn. nie ma nawiasu), postać kanoniczną tej funkcji można zapisać: $y = -4(x-0)^2 + 2$. Zatem współrzędne wierzchołka to (0, 2).

Przykład 4 $y = 2(x+4)^2$ (tzn. nie ma liczby za nawiasem), postać kanoniczną tej funkcji można zapisać: $y = 2(x+4)^2 + 0$. Zatem współrzędne wierzchołka to (-4, 0).

Przykład 5 $y = -2x^2 + 3x - 2$ (postać ogólna funkcji kwadratowej)**.**

Do wyznaczenia współrzędnych wierzchołka paraboli stosujemy wzory:

$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\cdot(-2)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$, $\quad q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{7}{4\cdot(-2)} = -\frac{7}{8}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot(-2)\cdot(-2) = 9 - 16 = -7$.

Zatem współrzędne wierzchołka to $\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{8}\right)$.

Lub postępujemy tak jak w zadaniu 2 (II SPOSÓB), czyli doprowadzamy do postaci kanonicznej i odczytujemy *p* i *q*.

Przykład 6 $y=2(x-2)(x+1)$ (postać iloczynowa funkcji kwadratowej)

Doprowadzamy tą funkcję do postaci ogólnej (patrz zad 1), po czym liczymy *p* i *q* korzystając ze wzorów.

$$y=2(x-2)(x+1)=2x^2-2x-4.\quad p=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2},\ \Delta=b^2-4ac=36,\ q=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-36}{8}=-4\frac{1}{2}.$$

Ćwiczenia:

Postępując analogicznie, wyznacz współrzędne wierzchołka:

a) $y=2(x+3)^2-4$	e) $y=-x^2$	i) $y=x^2-x+16$
b) $y=(x-9)^2+4$	f) $y=-2(x-1)(x+2)$	j) $y=-2x^2-x+4$
c) $y=3(x-2)^2$	g) $y=5(x+\frac{1}{2})(x-2)$	k) $y=-x^2+7x+1$
d) $y=-3x^2+1$	h) $y=-(2+x)(x-4)$	l) $y=3x^2-x-6$

Zad 4 Wyznacz zbiór wartości funkcji

Przykład 1 $y=-2(x-1)^2+4$.

Funkcja ta jest zapisana w postaci kanonicznej: $y=a(x-p)^2+q$, gdzie punkt o współrzędnych (*p*, *q*) jest wierzchołkiem paraboli. Zatem z przepisu funkcji odczytujemy, że *p* = 1, *q* = 4.

Ponieważ *a* = -2 (jest ujemne), ramiona paraboli skierowane są do dołu, zatem *q* będzie wartością największą. Zbiorem wartości funkcji będzie przedział $(-\infty,q\rangle$, czyli w tym przypadku $(-\infty,4\rangle$.

Przykład 2 $y=(x-2)^2+1$

W przypadku, gdy *a* jest dodatnie (ramiona paraboli są skierowane do góry), *q* jest wartością najmniejszą. Wtedy zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle q,+\infty)$. Zatem w tym przypadku zbiorem wartości jest przedział $\langle 1,+\infty)$.

Przykład 3 $y=-x^2+4x-3$

Funkcja jest zapisana w postaci ogólnej, więc w celu wyznaczenia wartości *q* najprościej zastosować wzór.

$$\Delta=b^2-4ac=16-4\cdot(-1)\cdot(-3)=16-12=4,\qquad q=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-4}{-4}=1.$$

Ramiona paraboli są skierowane do dołu, zatem zbiorem wartości będzie przedział $(-\infty,1\rangle$.

Przykład 4 $y=2(x-2)(x+3)$

Najpierw przedstawimy ta funkcję w postaci ogólnej, a następnie wyliczymy *q*.

$$y=2(x-2)(x+3)=2(x^2+3x-2x-6)=2(x^2+x-6)=2x^2+2x-12$$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4\cdot2\cdot(-12)=4+96=100,\qquad q=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-100}{8}=-12\frac{1}{2}.$$

Ramiona paraboli są skierowane do góry, zatem zbiorem wartości jest przedział $\left\langle -12\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Postępując analogicznie wyznacz zbiory wartości funkcji:

a) $y=2(x+3)^2-4$	d) $y=-3x^2$	g) $y=x^2+3x-3$
b) $y=3(x-2)^2$	e) $y=5(x+\frac{1}{2})(x-4)$	h) $y=-x^2+2x+\frac{1}{3}$
c) $y=-3x^2+1$	f) $y=-3(x-2)(x+5)$	i) $y=-3x^2+2x-8$

Zad 5 Rozwiąż nierówność

Przykład 1 $x^2 - 3x + 2 \le 0$.

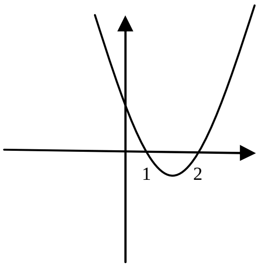
Najpierw wyrażenie po lewej stronie nierówności przyrównam do zera i potraktuję jako równanie kwadratowe, $x^2 - 3x + 2 = 0$. Obliczę teraz pierwiastki x_1 i x_2 (do wykonania czego potrzebuję policzyć wyróżnik Δ).

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$.

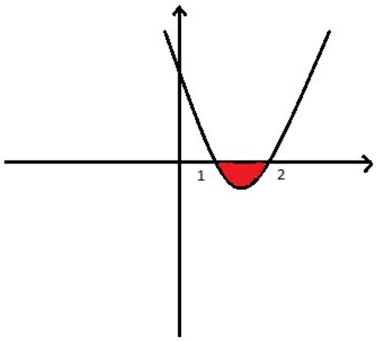
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $\quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Mając x_1 i x_2 mogę przedstawić funkcję w postaci iloczynowej ($y = a(x - x_1)(x - x_2)$): $y = (x-1)(x-2)$.

Szkicuję wykres uwzględniając obliczone $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ oraz korzystając z faktu, że *a* = 1 (jest większe od zera, więc ramiona paraboli skierowane są do góry):



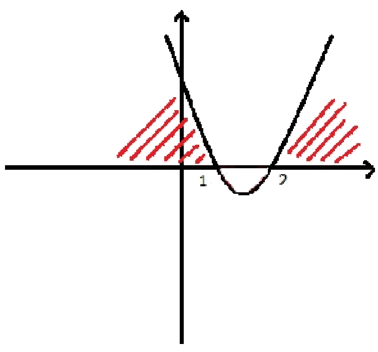
Wracam do nierówności $x^2 - 3x + 2 \le 0$. Odczytuję z wykresu te wartości, które są mniejsze lub równe zero (na rysunku zaznaczone są kolorem czerwonym), znajdują się one pod osią X:



Zatem funkcja przyjmuje wartości mniejsze lub równe zero (czyli $y \le 0$) dla $x \in \langle 1,2 \rangle$. Przedział jest obustronnie domknięty, ponieważ wartości są mniejsze <u>lub równe</u> zero, więc dla x=1 i x=2 wartość y=0, więc obie liczby spełniają nierówność.

Przykład 2

Zmieńmy teraz znak wyjściowej nierówności. Niech będzie teraz postaci: $x^2 - 3x + 2 > 0$. Wykorzystam poprzednie obliczenia na x_1 i x_2. Ponieważ wartości mają być większe od zera, znajdują się one nad osią X:



Zatem funkcja przyjmuje wartości większe od zera (czyli $y > 0$) dla $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. Przy 1 i 2 przedziały są otwarte, ponieważ wartości są większe od zera (nie są większe lub równe zeru), a skoro dla x=1 i x=2 wartość y=0, więc te liczby nie spełniają nierówności, więc przedziały musimy otworzyć.

Podsumowując: Kiedy mamy do czynienia ze znakami $\leq$ lub $\geq$, przedziały domykamy.
Kiedy mamy do czynienia ze znakami < lub >, przedziały otwieramy.

Pamiętaj!
Jeśli $\Delta < 0$ i $a < 0$, wykres funkcji znajduje się pod osią X.
Jeśli $\Delta < 0$ i $a > 0$, wykres funkcji znajduje się nad osią X.
Jeśli $\Delta = 0$ (niezależnie od znaku współczynnika *a*) wykres ma z osią X tylko jeden punkt wspólny.

Przykład 3 $x(x-5) > 0$

Wyrażenie po lewej stronie przyrównuję do zera $x(x-5) = 0$. Iloczyn dwóch liczb jest równy zero, wtedy i tylko wtedy gdy jedno albo druga jest równa zero, czyli: $x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 5 = 0$ więc $x = 0 \vee x = 5$. Szkicuję parabolę i odczytuję wartości większe od zera (czyli te „nad” osią X). Rozwiązaniem nierówności jest więc suma przedziałów $x \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$.

Przykład 4 $2x^2 - x \leq 0$

Wyrażenie po lewej stronie przyrównuję do zera i wyłączam przed nawias wspólny czynnik: $2x^2 - x = 0$; $x(2x-1) = 0$. Dalej postępuję tak samo jak w poprzednim przykładzie.

Przykład 5 $16 - 4x^2 > 0$

W wyrażeniu po lewej stronie stosuję wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i otrzymuję: $(4-2x)(4+2x) > 0$. Teraz wyrażenie przyrównuję do zera i postępuję analogicznie do poprzednich przykładów. $(4-2x)(4+2x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x = 0 \vee 4 + 2x = 0$. Zatem $x = 2 \vee x = -2$. Szkicuję parabolę i odczytuję wartości większe od zera. Rozwiązaniem nierówności jest więc przedział $x \in (-2, 2)$.

Ćwiczenia:

Rozwiąż nierówności:

a) $x^2 + 6x - 7 \leq 0$	d) $2x^2 - 5x + 4 \geq 0$	g) $\frac{1}{2}x^2 - 2x \leq 0$	j) $x^2 - 36 < 0$
b) $3x^2 + 10x + 30 < 0$	e) $x^2 - 3x > 0$	h) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$	k) $9x^2 - 1 \geq 0$
c) $x^2 - x - 2 \leq 0$	f) $2(x - 3x) \geq 0$	i) $5x(6 - x) \leq 0$	l) $49 - 4x^2 > 0$

Zad 6 Rozwiąż równanie: $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności odpowiednio „parujemy” wyrazy. W tym przypadku będzie to wyglądało tak: $(x^3 - 7x^2) + (-4x + 28) = 0$. Następnym krokiem jest wyłączenie wspólnych czynników przed nawiasy tak, aby w miarę możliwości, otrzymać w wyrażeniu dwa „identyczne nawiasy”: $x^2(x-7) - 4(x-7) = 0$. Teraz nawias $(x-7)$ potraktujemy jako wspólny czynnik dla całego wyrażenia i wyłączymy go przed nawias: $(x-7)(x^2-4) = 0$. Korzystając z faktu, że iloczyn dwóch liczb jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy jedna lub druga jest równa zero, postępujemy następująco:

$(x-7)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x - 7 = 0 \vee (x^2 - 4) = 0$.

Teraz naszym zadaniem jest wyznaczenie wszystkich *x* poprzez rozwiązanie obu równań.

Rozwiązując pierwsze równanie (które jest równaniem liniowym) otrzymujemy $\underline{x = 7}$. Natomiast w przypadku drugiego równania (kwadratowego) możemy go jeszcze rozpisać korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Zatem będzie ono miało teraz postać: $(x-2)(x+2) = 0$. Ponawiając postępowanie w przypadku iloczynu przyrównanego do zera mamy: $(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee x+2=0$. Rozwiązując oba równania liniowe otrzymujemy $\underline{x=2}$, $\underline{x=-2}$.

Podsumowując, rozwiązaniem równania $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$ są liczby: $x=7$, $x=2$, $x=-2$.

Ćwiczenia:

Rozwiąż równania:

a) $x^3 - 4x^2 + 5x - 20 = 0$

b) $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$

c) $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$

d) $2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0$

e) $2x^3 + 8x = 5x^2 + 20$

f) $6x^3 + 2x^2 = 3x + 1$

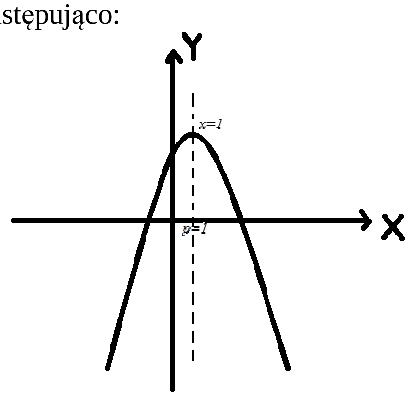
Zad 7 Wyznacz równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 2x + 3$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że parabola jest krzywą, która jest symetryczna względem prostej prostopadłej do osi X. Aby wyznaczyć jej równanie, należy wyznaczyć pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli. Korzystamy ze wzoru: $p = \frac{-b}{2a}$.

$p = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$. Zatem pierwsza współrzędna wierzchołka wynosi 1. Jeśli na wykresie tej funkcji wykreślimy prostą prostopadłą do osi X oraz przechodzącą przez *p*, parabola będzie względem niej symetryczna. Zatem osią symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 2x + 3$ jest prosta o równaniu $x = 1$.

Gdybyśmy narysowali wykres, wyglądałoby to następująco:



Ćwiczenia:

W każdym przypadku wyznacz równanie osi symetrii paraboli określonej danym równaniem:

a) $f(x) = x^2 + 6x - 7$

b) $f(x) = 3x^2 + 10x + 30$

c) $f(x) = x^2 - x - 2$

d) $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$

e) $f(x) = x^2 - x - 2$

f) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

g) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

h) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

i) $f(x) = -10x^2 - 3x + 1$

Zad 8 Podaj równanie prostej, z którą wykres funkcji kwadratowej ma dokładnie jeden punkt wspólny.

Przykład 1 $y = 2(x+3)^2 - 4$

Prosta, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą, jest równoległa do osi X oraz przechodzi przez jej wierzchołek (gdyby leżała inaczej, przecięłaby parabolę w dwóch punktach lub w żadnym). Zatem do wyznaczenia jej równania potrzebujemy znać drugą współrzędną wierzchołka paraboli.

Funkcja z zadania jest zapisana w postaci kanonicznej, czyli $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie (p,q) to współrzędne wierzchołka paraboli. W naszym przypadku $q = -4$, zatem równanie prostej to $y = -4$.

Przykład 2 $y = 2x^2 + 3x - 1$

Wiedząc, że potrzebuję *q*, korzystam ze wzoru: $q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-17}{4 \cdot 2} = -\frac{17}{8}$, gdzie

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 + 8 = 17$. Równanie szukanej prostej to $y = -\frac{17}{8}$.

Ćwiczenia

Wyznacz równanie prostej mającej dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej:

a) $y = 2(x+3)^2 - 4$
b) $y = (x-9)^2 + 4$
c) $y = 3(x-2)^2$
d) $y = -3x^2 + 1$
e) $y = -(x-4)^2$
f) $y = -2(x-1)^2 + 8$
g) $y = 5x^2 + 4x - 2$
h) $y = -3x^2 + 2x - 1$
i) $y = -x^2 + 2x - 5$
j) $y = x^2 - 4x - 7$

Zad 9 Sprawdź, czy punkt o współrzędnych (-1, 1) należy do wykresu funkcji: $f(x) = x^2 + x - 2$.

<u>Rozwiązanie:</u>

Aby ustalić, czy punkt należy do wykresu, należy podstawić do wzoru pierwszą współrzędną punktu za *x*, natomiast drugą za *y* (pamiętając, że *f(x)* oznacza to samo, co *y*). Jeśli po podstawieniu po obu stronach równania wyjdzie nam ta sama liczba, będzie to oznaczało, że punkt należy do wykresu. Natomiast w przypadku, gdy strony równania będą się od siebie różnić – punkt do wykresu nie należy.

Podstawimy teraz do wzoru funkcji $x = -1, y = 1$:

$1 \stackrel{?}{=} (-1)^2 + (-1) - 2$

$1 \stackrel{?}{=} 1 - 1 - 2$

$1 \stackrel{?}{=} -2$

Po podstawieniu wyszło nam, że $1 \neq -2$. Zatem punkt o współrzędnych (-1, 1) nie należy do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + x - 2$.

Ćwiczenia:

Sprawdź, czy punkt to danych współrzędnych należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x^2 + 6x - 7$; (0, -7)
b) $f(x) = 3x^2 + 10x + 30$; (-1, 20)
c) $f(x) = x^2 - x - 2$; (0, 0)
d) $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$; (1, 1)
e) $f(x) = x^2 - x - 2$; (-3, 7)
f) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$; (-2, -1)
g) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$; (-1, -3)
h) $f(x) = x^2 - 4x + 4$; (2, 0)
i) $f(x) = -10x^2 - 3x + 1$; (2, 11)

Zad 10

Rozwiąż równania:

a) $2x^2 - 6x = 0$
b) $3x + 4x^2 = 0$
c) $5x^2 = 10x$
d) $x = \sqrt{2}x^2$
e) $25 - 4x^2 = 0$
f) $\frac{2}{3}x^2 - 3 = 0$
g) $2x^2 - 9x - 35 = 0$
h) $5x^2 - 6x + 6 = 0$
i) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$
j) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
k) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
l) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
m) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$
n) $5x^2 = 8x - 5$
o) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$