Planimetria 2 - zadania przygotowawcze do sprawdzianu

Dodatkowo należy zaznajomić się z listą **Planimetria 1**. Problemy związane z geometrią analityczną (długość odcinka, środek odcinka, równanie okręgu) znajdują się na liście ***Geometria analityczna - zadania elementarne*** umieszczonej w części dla klasy czwartej.

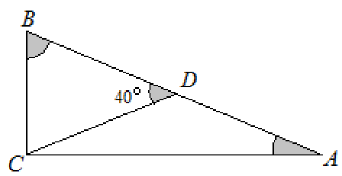
1. Okrąg K_1 ma środek w punkcie S_1= (-1, 2) i promień $r_1 = 2$. Jaką długość ma promień r_2 okręgu K_2 o środku w punkcie S_2= (3,-1) jeśli oba okręgi są: a) styczne zewnętrznie, b) styczne wewnętrznie ?
   Wskazówka: Oblicz odległość środków tych okręgów $|S_1S_2|$ i rozwiąż równanie opisujące daną sytuację (patrz podręcznik rozdział 5.1 str. 156). Narysuj okręgi K_1 i K_2 w obu sytuacjach aby "zobaczyć" o co chodzi.
   Odpowiedź: a) $r_2 = 3$, b) $r_2 = 7$.

2. Ile punktów wspólnych mają okręgi: K_1 o środku w punkcie S_1= (0, 0) i promieniu $r_1 = 2$ oraz K_2 o środku w punkcie S_2= (4,4) i promieniu r_2 o długości: a) 1, b) 5, c) 10 ?
   Wskazówka: Oblicz odległość środków tych okręgów $|S_1S_2|$ i porównaj z promieniami (patrz podręcznik rozdział 5.1 str. 156).
   Odpowiedź: a) okręgi nie mają punktów wspólnych bo są rozłączne zewnętrznie; b) dwa punkty wspólne - okręg się przecinają; c) brak punktów wspólnych, bo K_1 jest we wnętrzu K_2 - okręgi rozłączne wewnętrznie.

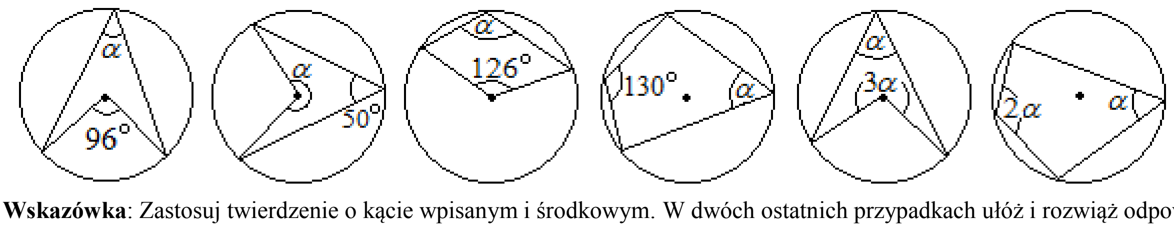
3. Ile punktów wspólnych ma prosta k o równaniu $y = -2$ z okręgiem o środku w punkcie (-2, 1) i promieniu długości 4?
   Wskazówka: Narysuj prostą i okrąg. Porównaj odległość prostej k od środka tego okręgu z promieniem (patrz podręcznik rozdział 5.1 str. 158).
   Odpowiedź: Prosta ma dwa punkty wspólne z okręgiem.

4. Podaj, ile punktów wspólnych ma prosta k o równaniu $x = 3$ z okręgiem o środku w punkcie (0,0) w zależności od długości promienia tego okręgu?
   Wskazówka: Narysuj prostą i środek okręgu. Porównaj promień okręgu z odległością prostej k od środka tego okręgu (patrz podręcznik rozdział 5.1 str. 158).
   Odpowiedź: Brak punktów wspólnych gdy $0 < r < 3$, jeden punkt wspólny (styczność prostej i okręgu) gdy $r = 3$, dwa punkty wspólne, gdy $r > 3$.

5. Trójkąt *ABC* jest prostokątny. Punkt *D* jest środkiem przeciwprostokątnej *AB*. Wyznacz kąty przy wierzchołkach *B* i *C*.
   Wskazówka: Narysuj okrąg opisany na tym trójkącie (gdzie jest środek tego okręgu?).
   Odpowiedź: $20°, 70°$.

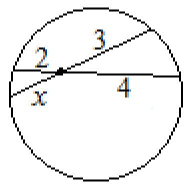


6. Wyznacz miarę kąta α



   Wskazówka: Zastosuj twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym. W dwóch ostatnich przypadkach ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie z niewiadomą α.
   Odpowiedź: Dla kolejnych rysunków od lewej: $48°$, $260°$, $117°$, $50°$, $72°$, $60°$.

7. Dwie cięciwy okręgu dzielą się jak na rysunku obok. Wyznacz *x*.
   Wskazówka: Po dorysowaniu dwóch odcinków (cięciw) można zauważyć dwa trójkąty, a jednocześnie dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Wystarczy udowodnić, że te trójkąty są podobne; z podobieństwa trójkątów wynika proporcja boków, co da równanie z jedną niewiadomą *x*.
   Odpowiedź: $x = 2\frac{2}{3}$.



8. Cięciwa okręgu ma długość 24 cm i jest oddalona od środka tego okręgu o 9 cm. Wyznacz długość tego okręgu.
   Wskazówka: Narysuj tą cięciwę, fragment prostopadłego do niej promienia o długości 9 cm oraz promień poprowadzony do jednego z końców tej cięciwy. Powstanie trójkąt prostokątny z wiadomymi przyprostokątnymi i niewiadomą przeciwprostokątną R.
   Odpowiedź: długość okręgu to 30π cm.

9. Cięciwa okręgu ma długość 12 cm i dzieli prostopadłą do niej średnicę w stosunku 1:3. Wyznacz pole tego okręgu.
   Wskazówka: Skoro średnica jest podzielona w stosunku 1:3, to promień jest podzielony na połowy. Wystarczy narysować odpowiedni trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną będzie promień poprowadzony do końca cięciwy i zauważyć, że to jest tzw. trójkąt "charakterystyczny", który jest połową pewnego trójkąta równobocznego o wysokości 6.
   Odpowiedź: Pole ma wartość 48π cm^2.

10. Na tarczy tradycyjnego zegarka znajduje się dwanaście kropek oznaczających kolejne godziny od 1 do 12. Jaki kąt wyznaczają cięciwy poprowadzone od godziny 12 do godziny 3 i od 12 do 8?
    Wskazówka: Jest to kąt wpisany oparty na łuku od 8 do 3 (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek). Wyznacz najpierw miarę kąta środkowego.
    Odpowiedź: $75°$.

11. Pole równoległoboku o bokach długości $a = 10$ cm i $b = 6$ cm wynosi 30 cm^2. Wyznacz miary kątów tego równoległoboku.
    Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $P = a \cdot b \cdot sin\alpha$ i wyznacz sinus kąta ostrego α. Jaki kąt ma taki sinus? Następnie wyznacz kąt rozwarty.
    Odpowiedź: $30°$, $150°$.

12. Dłuższa wysokość równoległoboku o bokach $a = 18$ cm i $b = 12$ cm ma długość 9 cm. Jaką długość ma krótsza wysokość tego równoległoboku? Jakie pole ma ten równoległobok?
    Wskazówka: Pole równoległoboku to iloczyn długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok: $P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, zatem wysokość jest odwrotnie proporcjonalna do długości boku (na dłuższy bok jest opuszczona krótsza wysokość), więc stosunek długości boków jest odwrotny do stosunku długości wysokości.
    Odpowiedź: $h_a = 6$, $P = 18 \cdot 6 = 108$.

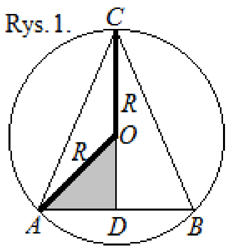
13. W trójkąt równoboczny wpisany jest okrąg o promieniu $r = 2$ cm. Wyznacz długość boku tego trójkąta.
    Wskazówka: Wiadomo, że w przypadku trójkąta równobocznego $r = \frac{1}{3}h$, gdzie $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Oblicz h, a następnie a.
    Odpowiedź: $a = 4\sqrt{3}$ cm.

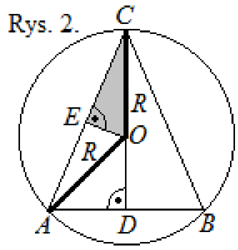
14. Na trójkącie równobocznym opisany jest okrąg o promieniu $R = 6\sqrt{3}$ cm. Wyznacz długość boku tego trójkąta.
    Wskazówka: Wiadomo, że w przypadku trójkąta równobocznego $R = \frac{2}{3}h$.
    Odpowiedź: $a = 18$ cm.

15. Wyznacz promień r koła wpisanego i promień R koła opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych $a = \sqrt{2}$ i $b = 7\sqrt{2}$.
    Wskazówka: Promień okręgu wpisanego w trójkąt można wyznaczyć na dwa sposoby: albo ze wzoru $r = \frac{P}{p}$, gdzie *P* to pole tego trójkąta, a *p* to połowa jego obwodu (ten wzór nadaje się do każdego trójkąta), albo ze wzoru $r = \frac{a+b-c}{2}$, gdzie *c* to długość przeciwprostokątnej (ten wzór "pracuje" jedynie w trójkątach prostokątnych). Wyznaczenie promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym nie wymaga żadnych wskazówek.
    Odpowiedź: $r = 4\sqrt{5} - 5$, $R = 5$.

16. Wyznacz pole, obwód oraz promień koła wpisanego w trójkąt prostokątny, w którym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją na dwa odcinki o długościach 9 cm i 16 cm.
    Wskazówka: Narysuj ten trójkąt a następnie wyznacz wysokość, o której mowa w treści zadania, korzystając z tego, że wszystkie trzy trójkąty które widzisz na rysunku są podobne (dlaczego?). Po wyznaczeniu *h* łatwo wyznaczyć przyprostokątne (jak nie zauważysz trójkątów *"egipskich"* , to oblicz z tw. Pitagorasa). Pamiętaj, że $r = \frac{a+b-c}{2}$.
    Odpowiedź: Pole wynosi 150 cm^2, obwód 30 cm, a promień 5 cm.

17. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie $a = 10$ i ramieniu $b = 13$.



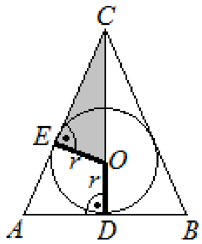


Wskazówka: Najpierw wyznacz wysokość tego trójkąta, na której znajdzie się środek okręgu opisanego (czyli wysokość opuszczoną na podstawę). Zadanie można łatwo rozwiązać na dwa sposoby:

1. z twierdzenia Pitagorasa dla szarego trójkąta - patrz Rys.1,
2. z podobieństwa trójkątów *ADC* i *OEC* - patrz Rys. 2. (jaką długość ma odcinek *CE*?)

Odpowiedź: $R = 7\frac{1}{24}$.

18. Oblicz pole okręgu wpisanego w trójkąt z poprzedniego zadania.

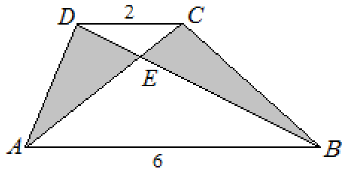


Wskazówka: Podobnie jak w poprzednim zadaniu wyznacz wysokość tego trójkąta. Również to zadanie można rozwiązać na dwa sposoby:

1. ze wzoru $r = \frac{P}{p}$, gdzie *P* to pole tego trójkąta, a *p* to połowa jego obwodu.
2. z podobieństwa trójkątów *ADC* i *OEC* - patrz rysunek obok. (jak możesz zaznaczyć długość boku *CO*?)

Odpowiedź: $r = 3\frac{1}{3}$.

19. Podstawy trapezu mają długości: $a = 6$, $b = 2$, a wysokość $h = 4$ (patrz rysunek). Wyznacz pola wszystkich czterech trójkątów na jakie dzielą ten trapez jego przekątne.



Wskazówka: Narysuj wysokość trapezu, która przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych. Skorzystaj z podobieństwa dwóch trójkątów z podstawami a i b, aby wyznaczyć wysokości tych trójkątów. Pola szarych trójkątów łatwo obliczyć odejmując pola odpowiednich trójkątów.

Odpowiedź: Pola trójkątów w kolejności rosnącej: 1, 3, 3, 9.

20. W trapezie *ABCD*, w którym *AB* jest dolną podstawą, kąt przy wierzchołku *D* (δ) jest 11 razy większy od kąta przy wierzchołku *A* (α), natomiast kąt przy wierzchołku *B* (β) jest większy od α o 45°. Wyznacz kąty tego trapezu.

Wskazówka: Kąty przy wierzchołkach A i D (podobnie jak B i C), to kąty uzyskane z przecięcia dwóch prostych równoległych (zawierających podstawy trapezu) trzecią prostą (zawierającą ramię trapezu).

Odpowiedź: $\alpha = 15°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$, $\delta = 165°$.

21. Oblicz obwód i pole trapezu prostokątnego o podstawach $a = 8$, $b = 2$, jeśli kąt ostry tego trapezu ma miarę 30°.

Wskazówka: Narysuj ten trapez i zaznacz na nim trójkąt prostokątny z podanym kątem ostrym, następnie wyznacz jego wysokość.

Odpowiedź: Obwód: $10 + 6\sqrt{3}$, pole: $10\sqrt{3}$.

Piotr Kryszkiewicz